平成 27 年度卒業論文

外部性のある一対多マッチングの安定性

所属ゼミ　宇野ゼミ
学籍番号　1121100154
氏名　髙橋真美

大阪府立大学
現代システム科学域　マネジメント学類

要約

本論文は外部性のある一対多マッチング問題におけるペア安定マッチングを考察した。そして、外部性のある任意の一対多マッチング問題においてペア安定マッチングが存在することを示した。

目次

第 1 章　序論

本論文では外部性のある一対多マッチング問題の安定性を考察する。ここでは一対多マッチング問題の代表的な例として大学と学生の学校選択問題を扱う。近年では国内でも東京都(19 区 10 市)を中心にマッチング理論を利用した学校選択制度が採用されている。[1] 学生が進学先を選択できるということは一般に良いことだと考えられる。しかし、学校では学生には必ず同期が存在し、その同期が自分に良い影響を与えるとは限らない。たとえば、Sacerdote (2001) は周りの学生のレベルがその学生の成績に影響を与えることを示している。同じ所属になった学生の中には「この子と同じ学校にだけはなりたくなかった」という者もいるだろう。負の外部性があらわれるのであればマッチングを行う意味が阻害されてしまう。負の外部性を引き起こさないためには自身の所属先だけでなく、他のものがどこに所属するのかも考慮する必要がある。

本論文では、学生は誰とどの学校に行きたいかについて選好を持ち、大学はどの学生たちに来てほしいかについて選好を持つ。また、ほかの大学がだれを獲得しているのかも考慮に入れている。このように自らのペア相手以外のマッチの仕方も選好に関係する状況を外部性のあるマッチング問題とよぶ。

本論文は外部性のあるマッチング問題における安定性に注目する。安定マッチングとは、大学と学生がほかの相手と手を組んでマッチングを変えようとしない状態のマッチングのことをいう。具体的には大学が今、獲得している学生の入学を拒否してほかの学生を入れたり、学生が入学を辞退してほかの大学へ行くような行動を起こさないということである。本論文ではそのような安定マッチングは存在するか、という問いを考察した。

本論文の主結果は外部性のあるどの一対多マッチング問題にもペア安定マッチングが存在することである。

外部性のあるマッチング問題に関する先行研究には Sasaki & Toda (1996)、Mumcu & Saglam (2010)、Bando (2012) がある。Sasaki & Toda (1996) は外部性のある一対一マッチング問題において全員が誰かとマッチするという条件下での安定マッチングの存在を示した。本論文はこの結果を一対多マッチング

[1] 東京都教育庁ホームページ参照
(http://www.metro.tokyo.jp/INET/OSHIRASE/2015/03/20p3q100.htm)

に拡張している。一方、Mumcu & Saglam (2010) と Bando (2012) は誰ともマッチしないものがいる場合も考慮に入れ、前者は一対一マッチング問題を、後者は一対多マッチング問題を考察している。Bando (2012) は企業側だけが外部性のある選好を持つ一対多マッチング問題を考えているのに対し、本論文は大学と学生の両方が外部性のある選好を持つ一対多マッチング問題を考察している点が異なる。

第2章　一対多マッチング問題と安定

m校の大学とn人の学生の間で全員が誰かとマッチする一対多マッチング問題を考える。大学の集合を$C=\{c_1,c_2,c_3,\dots,c_m\}$、学生の集合を$S=\{s_1,s_3,s_3,\dots,s_n\}$とする。大学$c$がS上にもつ合理的選好を$R_c^*$、学生$s$が$C$上にもつ合理的な選好を$R_s^*$とする。[2]これらの選好プロファイルを$R^*=((R_c^*)_{c\in C},(R_s^*)_{s\in S})$と書く。また、大学$c$の定員を$q_c\geq 1$とする。定員のプロファイルを$q=(q_c)_{c\in C}$と書く。簡単化のため、各大学の定員の合計は学生の数と等しいと仮定する。すなわち$\sum_{c\in C}q_c=n$とする[3]。これらの組(C,S,R^*,q)を**外部性のないマッチング問題**という。

学生$s,s'\in S$に対する大学cの選好がsR_c^*s'かつ$s'R_c^*s$を満たす時、sI_c^*s'と書き、sR_c^*s'を満たすが$s'R_c^*s$を満たさない時、sP_c^*s'と書く。学生sの選好についても同様に表記する。また、集合Xの要素の数を$|X|$と表記する。

外部性のないマッチング問題(C,S,R^*,q)考える。対応$\mu:C\cup S\twoheadrightarrow C\cup S$が**マッチングである**とは、すべての大学$c\in C$とすべての学生$s\in S$に対して

1. $\mu(c)\in S$かつ$|\mu(c)|=q_c$,
2. $\mu(s)\in C$かつ$|\mu(s)|=1$,
3. $\mu(s)=\{c\}\Leftrightarrow s\in\mu(c)$

を満たすことをいう。ここで$\mu(c)$、$\mu(s)$はそれぞれ大学c、学生sのマッチング

---

[2] 合理的選好：集合 X 上の選好R_iが合理的であるとは①完備性($\forall\, x,x'\in X$, $x\,R_i\,x'$ または $x'\,R_i\,x$)、②推移性($\forall\, x,x',x"\in X$, $x\,R_i\,x'$ かつ$x'R_i\,x"$ならば $x\,R_i\,x"$)を満たすことをいう。

[3] 各大学の定員の合計が学生の人数と等しいという仮定のもとでは、すべてのマッチングは個人合理性を常に満たす。一般に、すべてのマッチングが個人合理性を満たすようなマッチング問題のみを考察対象とする場合、以下の議論を同様にできる。

相手の集合である。すべてのマッチングの集合をMと書く。大学cと学生sがペアであることを$(c,s) \in \mu$と書く。また、大学cと学生sがマッチするすべてのマッチングの集合を$M(c,s) = \{\mu | (c,s) \in \mu\}$と書く。$|\mu(s)| = 1$であるので、$\mu(s) = \{c\}$を$\mu(s) = c$と書くことにする。

Gale & Shapley (1962)は外部性のないマッチング問題における安定マッチングを定式化した。ペア安定マッチングとは、どの大学と学生もペアを作ってマッチングμから他のマッチングへ移るインセンティブがない状態のことである。また、グループ安定マッチングとは、大学が学生を入れ替えることによって得をするような大学と学生の提携が存在しない状態のことである。

定義 2.1　外部性のないマッチング問題(C,S,R^*,q)のもとでマッチングμをペア$(c,s) \notin \mu$が**ブロックする**とは、

1. $\mu(s) \neq c$,
2. ある$s' \in \mu(c)$に対して
   (a) $s\, R_c^* s'$ かつ $c\, R_s^* \mu(s)$,
   (b) $s\, P_c^* s'$ または $c\, P_s^* \mu(s)$

を満たすことである。マッチングμをブロックするペア(c,s)が存在しないとき、マッチングμは**ペア安定的である**という。

定義 2.2　外部性のないマッチング問題(C,S,R^*,q)のもとでマッチングμを提携$A \subset C \cup S$が**ブロックする**とは、以下の条件を満たすマッチングμ'が存在することをいう。すべての$c,s \in A$に対して

1. $\mu'(s) \in A$,
2. $\mu'(c) \subset A \cup \mu(c)$,
3. ある$s' \in \mu(c)$に対して
   (a) $\mu'(c)\, R_c^*\, s'$ かつ$\mu'(s)\, R_s^*\, \mu(s)$,
   (b) $\mu'(c)\, P_c^*\, s'$ または$\mu'(s)\, P_s^*\, \mu(s)$

が成立する。マッチングμをブロックする提携Aが存在しないとき、マッチングμは**グループ安定的である**という。

Gale & Shapley (1962) は外部性のないすべてのマッチング問題においてペア安定マッチングの存在を示している。

定理 2.3　外部性のないすべてのマッチング問題においてペア安定マッチングが存在する。

ペア安定マッチングは、次の**受入保留方式**によって導出できる。ここでは学生が志望を表明する学生側プロポーズの場合を説明する。

1. 学生が志望校のリストを表明する。
2. 第一志望の大学は自身の選好順位の上位から定員の許す限り学生を保留し、それ以外を拒否する。ただし、選好が無差別な場合はプレイヤーの添え字の数字が小さいものを優先する。
3. 拒否された学生は第二志望へと移る。大学は保留している学生と新たにきた学生を比べて選好順位の高い学生を定員の許す限り保留し、それ以外は拒否する。ここでも選好が無差別な場合はプレイヤーの添え字の数字が小さいものを優先する。

これをすべての学生が保留されるまで繰り返す。拒否される学生がいなくなったとき、プロセスは終了する。

また外部性のないマッチング問題において、あるマッチングがペア安定的であることとグループ安定的であることとは同値であることを示すことができる。したがって外部性のないマッチング問題においてグループ安定マッチングが存在する。

第 3 章　外部性のある一対多マッチング問題

外部性のある一対多マッチング問題とそこでの安定マッチングについて定式化する。大学の集合を C、学生の集合を S、定員のプロファイルを q とする。各大学 $c \in C$、各学生 $s \in S$ がマッチングの集合 M 上にもつ合理的な選好をそれぞれ R_c、R_s とする。これらの選好プロファイルを R とする。このような組 (C,S,R,q) を**外部性のあるマッチング問題**という。

外部性のある一対多マッチング問題におけるペア安定マッチングとは、お互いがマッチする最悪の場合を想定しても今のマッチングよりは改善されるペア (c,s) が存在しないマッチングのことをいう。

定義 3.1 外部性のあるマッチング問題 (C,S,R,q) のもとでマッチング μ をペア $(c,s) \notin \mu$ が**ブロックする**とはすべての $\mu' \in M(c,s)$ に対して

(1) $\mu' R_c \mu$ かつ $\mu' R_s \mu$,

(2) $\mu' P_c \mu$ または $\mu' P_s \mu$

の 2 つが成り立つことをいう。このような $(c,s) \notin \mu$ が存在しないとき、マッチング μ は**ペア安定的である**という。

この定義は Sasaki & Toda (1996)で定義された一対一マッチングにおける安定性を一対多マッチングへと拡張したものである。[4]

第 4 章　ペア安定マッチングの存在と導出

外部性のあるマッチング問題においてペア安定マッチングは存在する。

定理 4.1 外部性のある任意のマッチング問題 (C,S,R,q) においてペア安定マッチングは存在する。

証明は Sasaki & Toda (1996, Theorem 4.1)の証明を一対多マッチングへ拡張している。まず、以下の 2 ステップでペア安定マッチングを導出できることを示す。

---

[4] Sasaki & Toda (1996) は、一対一マッチング問題において、より一般的に、次のような安定マッチングについて議論している。各主体は誰かとマッチした時に起こりうるマッチングについてある想定をしている。その想定プロファイル ϕ が各主体において整合的で、その ϕ の下でどのペアもブロックしないマッチングを ϕ-安定性と呼んでいる。整合的な想定プロファイル ϕ を任意に固定した場合、ϕ-ペア安定マッチングが存在するとは限らない。しかし、各主体は、誰かとマッチした条件下でどのマッチングも起こりうると想定している想定プロファイル ϕ ならば、ϕ-安定マッチングは存在することを Sasaki & Toda (1996) が示している。その一対一マッチング問題で存在が保証されている安定マッチングを一対多マッチングへ拡張したものが定義 3.1 である。

ステップ 1　マッチング問題 (C,S,R,q) を次のように外部性のないマッチング問題 (C,S,R^*,q) へ帰着する。任意に大学 $c \in C$ と学生 $s \in S$ を固定した時、$\overline{\mu_s}$ を c が s とマッチするマッチングの中で c にとって最下位のマッチングとする。すなわち $\overline{\mu_s}$ は $\mu' \in A(c,s)$ であるすべてのマッチング $\mu' \neq \overline{\mu_s}$ に対して $\mu' \, P_c \, \overline{\mu_s}$ である。同様に $\overline{\mu_c}$ は s が c とマッチするマッチングの中で s にとっての最下位のマッチングとする。

大学 c の学生の集合 S 上の選好 R_c^* を各 $s,s' \in S$ $(s \neq s')$ に対して、

$$\overline{\mu_s} \, R_c \, \overline{\mu_{s'}} \Leftrightarrow s \, R_c^* \, s'$$

と定める。同様に、学生 s の大学の集合 C 上の選好 R_s^* を各 $c,c' \in C$ $(c \neq c')$ に対して、

$$\overline{\mu_c} \, R_s \, \overline{\mu_{c'}} \Leftrightarrow c \, R_s^* \, c'$$

と定める。

このように定められた選好プロファイルを R^* とする。このような (C,S,R^*,q) を (C,S,R,q) から帰着された外部性のないマッチング問題とよぶ。

ステップ 2　帰着された外部性のないマッチング問題 (C,S,R^*,q) における安定マッチングを Gale & Shapley (1962)の受入保留方式で求める。

補題 4.2　外部性のあるマッチング問題 (C,S,R,q) から帰着される外部性のないマッチング問題 (C,S,R^*,q) の安定マッチングは (C,S,R,q) におけるペア安定マッチングである。

証明　(C,S,R,q) から帰着された外部性のないマッチング問題における安定マッチングを μ^* とする。μ^* が (C,S,R,q) のペア安定マッチングであることを背理法で示す。μ^* が (C,S,R,q) のペア安定マッチングでないと仮定する。このとき、すべてのマッチング $\mu' \in M(c,s)$, $\mu' \neq \mu^*$ に対して

(1) $\mu' \, R_c \, \mu^*$ かつ $\mu' \, R_s \, \mu^*$

(2) $\mu' \, P_c \, \mu^*$ または $\mu' \, P_s \, \mu^*$

を満たすペア $(c,s) \notin \mu^*$ が存在する。すべてのマッチング $\mu' \in M(c,s)$ に対して、$\mu' \, P_s \, \mu^*$ または $\mu' \, P_c \, \mu^*$ であるので、$\overline{\mu_c} \, P_s \, \mu^*$ または $\overline{\mu_s} \, P_c \, \mu^*$ である。

ここで $s' \in \mu^*(c)$ は、すべての $s'' \in \mu^*(c)$ に対して $\overline{\mu_{s''}}\ R_c\ \overline{\mu_{s'}}$ を満たすものとする。すると、

(1) $\overline{\mu_s}\, R_c\, \overline{\mu_{s'}}$ かつ $\overline{\mu_c}\, R_s\, \overline{\mu_{\mu^*(s)}}$

(2) $\overline{\mu_s}\, P_c\, \overline{\mu_{s'}}$ または $\overline{\mu_c}\, P_s\, \overline{\mu_{\mu^*(s)}}$

である。したがって、

(1) $s\, R_c^* s'$ かつ $c\, R_s^* \mu^*(s)$

(2) $s\, P_c^* s'$ または $c\, P_s^* \mu(s)$

である。よってペア (c,s) は μ^* をブロックする。これは μ^* が (C,S,R^*,q) において安定マッチングであることに矛盾する。したがって μ^* は (C,S,R,q) のペア安定マッチングである。（証明終わり）

証明（定理 4.1） 任意に外部性のあるマッチング問題 (C,S,R,q) を固定する。(C,S,R,q) から帰着された外部性のないマッチング問題 (C,S,R^*,q) を考える。この時、R の合理性より、R^* も合理的であることを示すことができる。また、定理 2.3 より帰着された外部性のないマッチング問題 (C,S,R^*,q) にペア安定マッチング μ^* が存在する。補題 4.2 より、μ^* は外部性のあるマッチング問題 (C,S,R,q) におけるペア安定マッチングである。（証明終わり）

第 5 章　例

5.1　定理 4.1 の証明へのリマーク

Sasaki & Toda (1996)で考えられている一対一マッチングとは異なり、一対多マッチングでは大学のマッチング相手が複数いる。そのため、Sasaki & Toda (1996) と同様に厳密な選好プロファイルのみを想定した外部性のあるマッチング問題を考察したとしても帰着された外部性のないマッチング問題では無差別を含む選好プロファイルとなり得る。そのことへ対処するために定理 4.1 の証明では Sasaki & Toda (1996)の証明と異なり、無差別も含む外部性のないマッチング問題への帰着も想定して議論している。このことを次の例で示す。

例 1　大学の集合を $C=\{c_1,c_2\}$、学生の集合を $S=\{s_1,s_2,s_3\}$、各大学の定員をそれぞれ $q_{c1}=2$、$q_{c2}=1$ とする。このときマッチングは $\mu_1=\{(c_1,s_1),(c_1,s_2),$

$(c_2, s_3)\}$、$\mu_2 = \{(c_1, s_1), (c_1, s_3), (c_2, s_2)\}$、$\mu_3 = \{(c_1, s_2), (c_1, s_3), (c_2, s_1)\}$ の 3 つある。すなわち、$M = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$である。(図 1 参照)

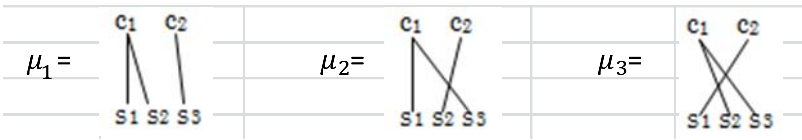

図 1

また、選好プロファイルは以下のようになっているとする。

$$\mu_2\ P_{c1}\ \mu_1\ \ P_{c1}\ \mu_3$$

$$\mu_3\ P_{c2}\ \mu_1\ \ P_{c2}\ \ \mu_2$$

$$\mu_2\ P_{s1}\ \mu_3\ \ P_{s1}\ \mu_1$$

$$\mu_1\ P_{s2}\ \ \mu_2\ \ P_{s2}\ \mu_3$$

$$\mu_1\ P_{s3}\ \ \mu_2\ \ P_{s3}\ \mu_3$$

ステップ 1 として、外部性のないマッチング問題(C, S, R^*, q)へ帰着すると次の選好プロファイルになる。

$$s_1\ \ P^*_{c1}\ s_2\ I^*_{c1}\ s_3$$

$$s_1\ P^*_{c2}\ s_3\ P^*_{c2}\ s_2$$

$$c_2\ P^*_{s1}\ c_1$$

$$c_2\ P^*_{s2}\ c_1$$

$$c_2\ P^*_{s3}\ c_1$$

この時、帰着されたマッチング問題において、大学c_1にとって学生s_2とs_3は無差別となり、Sasaki & Toda (1996) の議論をそのまま適応できない。そのため、定理 4.1 の証明において、無差別も考慮に入れた外部性のないマッチングを想定した議論を行っている。

なお、ステップ 2 として、帰着された外部性のないマッチング問題に対して学生側プロポーズの受入保留方式を用いると安定マッチング$\mu_3 = \{(c_1, s_2), (c_1, s_3), (c_2, s_1)\}$が求まる。補題 4.2 より$\mu_3$はペア安定マッチングである。

5.2 グループ安定マッチングの非存在

外部性のない場合と異なり、外部性のあるマッチング問題においては、ペア

安定性とグループ安定性は同値ではない。グループ安定性は次のように定義できる。

定義 5.1 外部性のあるマッチング問題 (C,S,R,q) のもとでマッチング μ を**グループでブロックする**とは、以下のようなマッチング $\mu' \in M(c,s)$ と提携 $A \subset C \cup S$ が存在することである。すなわち、すべての $c,s \in A$ に対して

1. $\mu'(s) \in A$,
2. $\mu'(c) \subset A \cup \mu(c)$,
3. $\mu' \, R_s \, \mu$ かつ $\mu' \, R_c \, \mu$,
4. $\mu' \, P_s \, \mu$ または $\mu' \, P_c \, \mu$

を満たすことである。このようなマッチング μ' と提携 $A \subset C \cup S$ が存在しないとき、マッチング μ は**グループ安定的である**という。

外部性のあるマッチング問題においてグループ安定マッチングならペア安定マッチングである。しかし、外部性がない時とは異なり、その逆は成立しないことを例 1 によって示すことができる。

例 2(例 1 の続き) 選好プロファイルは引き続き、

$$\mu_2 \, P_{c1} \, \mu_1 \;\; P_{c1} \, \mu_3$$
$$\mu_3 \, P_{c2} \, \mu_1 \;\; P_{c2} \;\; \mu_2$$
$$\mu_2 \, P_{s1} \, \mu_3 \;\; P_{s1} \, \mu_1$$
$$\mu_1 \, P_{s2} \;\; \mu_2 \;\; P_{s2} \, \mu_3$$
$$\mu_1 \, P_{s3} \;\; \mu_2 \;\; P_{s3} \, \mu_3$$

とする。

このとき、

$\mu_3 \, P_{c2} \, \mu_1$ かつ $\mu_3 \, P_{s1} \, \mu_1$ より、(c_2, s_1) が μ_1 をブロックする。

$\mu_1 \, P_{c2} \, \mu_2$ かつ $\mu_1 \, P_{s3} \, \mu_2$ より、(c_2, s_3) が μ_2 をブロックする。

$\mu_2 \, P_{c1} \, \mu_3$ かつ $\mu_2 \, P_{s1} \, \mu_3$ かつ $\mu_2 \, P_{s3} \, \mu_3$ より、$\{c_1, s_1, s_3\}$ が μ_3 をブロックする。

よってグループ安定マッチングは存在しない。

5.3　耐戦略性

4 章で導入したのペア安定マッチングの導出方法は耐戦略性を満たさない。

アルゴリズム $g(Q)$ とは、申告された各選好プロファイル Q に対してマッチングを割り当てる関数である。

アルゴリズム $g(Q)$ が学生側の**耐戦略性を満たす**とは、各 $i \in S$ が真の選好 Q_i を申告することが弱支配戦略になっているということである。すなわち、Q_i とは異なる i の選好を Q_i' 、i 以外の選好を Q_{-i} とする。この時、すべての Q_i', Q_{-i} に対して

$$g(Q_i, Q_{-i})\, R_i\, g(Q_i', Q_{-i})$$

が成り立つことである。

外部性のない一対多マッチング問題では、受入保留方式が片側の耐戦略性を満たす。しかし、外部性のある一対多マッチング問題では満たさない。引き続き、例 1 を用いて 4 章の導出方法には学生が嘘の選好を申告することで結果が改善される場合があることを示す。

例 3(例 1 の続き)　選好プロファイルは以下のままとする。

$$\mu_2\, P_{c1}\, \mu_1\ \ P_{c1}\, \mu_3$$
$$\mu_3\, P_{c2}\, \mu_1\ \ P_{c2}\ \mu_2$$
$$\mu_2\, P_{s1}\, \mu_3\ \ P_{s1}\, \mu_1$$
$$\mu_1\, P_{s2}\ \mu_2\ \ P_{s2}\, \mu_3$$
$$\mu_1\, P_{s3}\ \mu_2\ \ P_{s3}\, \mu_3$$

しかし、s_1 が選好を偽って $\mu_2\, P_{s1}\, \mu_1\ \ P_{s1}\, \mu_3$ と申告し、s_2 が真の選好を申告しているとする。このとき、s_3 が正直に真の選好を申告すると得られるマッチングは変わらず μ_3 のままである。

そこで、s_3 は選好を偽り、$\mu_2\, P_{s3}\ \mu_3\ \ P_{s3}\, \mu_1$ を申告する。このときの選好プロファイルは次のようになる。

$$\mu_2\, P_{c1}\, \mu_1\ \ P_{c1}\, \mu_3$$
$$\mu_3\, P_{c2}\, \mu_1\ \ P_{c2}\ \mu_2$$
$$\mu_2\, P_{s1}\, \mu_1\ \ P_{s1}\, \mu_3$$
$$\mu_1\, P_{s2}\ \mu_2\ \ P_{s2}\, \mu_3$$
$$\mu_2\, P_{s3}\ \mu_3\ \ P_{s3}\, \mu_1$$

この選好プロファイルに対して 4 章の導出方法を用いる。

ステップ 1　申告された選好プロファイルを外部性のないマッチング問題 (C, S, R^*, q) へ変換する。

$$s_1\ P^*_{c1}\ s_2\ I^*_{c1}\ s_3$$

$$s_1\ P^*_{c2}\ s_3\ P^*_{c2}\ s_2$$

$$c_1\ P^*_{s1}\ c_2$$

$$c_2\ P^*_{s2}\ c_1$$

$$c_1\ P^*_{s3}\ c_2$$

ステップ 2　学生側プロポーズの受入保留方式により求まる安定マッチングは $\mu_2 = \{(c_1, s_1), (c_1, s_3), (c_2, s_2)\}$ である。

選好を正直に申告した場合に得られるマッチングは μ_3 より、s_3 は嘘をつくことで μ_2 へ結果が改善される。したがってこのアルゴリズムは耐戦略性を満たさない。

参考文献

Bando, K. (2012) “Many-to-one matching markets with externalities among firms,” *Journal of Mathematical Economics* 48 (2012), pp.14–20.

Gale, D., and Shapley, L.S. (1962) “College admissions and the stability of marriage,” *The American Mathematical Monthly*, Vol.69, No.1, pp.9-15.

Mumcu, A., and Saglam, I. (2010) “Stable one-to-one matchings with externalities,” *Mathematical Social Sciences*, 60, pp.154–159.

Roth, A.E.,and Sotomayor, M.A.O. (1990) *Two-sided matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press.

Sacerdote, B. (2001) “Peer effects with random assignment: Results for dartmouth roommates,” *The Quarterly Journal of Economics* ,116(2), pp. 681-704.

Sasaki, H., and Toda, M. (1996) “Two-Sided Matching Problems with Externalities,” *Journal of Economic Theory*, 70 (1), pp.93-108.

東京都教育庁「東京都公立学校数、学校選択制の実施状況及びコミュニティ・スクールの設置状況について」（2015/03/26）
http://www.metro.tokyo.jp/INET/OSHIRASE/2013/03/20n3l100.htm